

# Vers une nouvelle représentation des déformations horizontales de la croûte terrestre et de leurs erreurs avec un champ régulier de tenseurs

■ Leila EISSA - Michel KASSER

*L'étude des déformations est un sujet classique et très important pour les applications géophysiques de mesures géodésiques, l'évaluation des déformations horizontales de l'écorce terrestre se faisant classiquement par le calcul de déplacement planimétrique des points géodésiques et ensuite par le calcul d'un tenseur de déformation à l'intérieur de chaque figure élémentaire du réseau. Le travail présenté dans cet article porte sur la détermination et la représentation simultanée de la déformation et de son degré de signification par le biais d'une nouvelle méthode de cartographie des tenseurs de déformation. Elle est destinée à faciliter le lien entre les géodésiens d'une part, les géologues et les géophysiciens d'autre part, de façon à éviter les difficultés de lecture de la représentation actuelle classique des tenseurs de déformation, et à donner une interprétation géophysique plus aisée, pertinente et complète des phénomènes observés.*

## MOTS-CLÉS

Tenseur de déformation, représentation cartographique, méthode de Monte Carlo, interprétation géophysique

Les techniques de géodésie spatiale peuvent donner des résultats très précis, de l'ordre du mm, sur les mesures de positionnement des points géodésiques. Les mesures de leur vitesse, nécessaires pour des études de géodynamique, fournissent donc aisément des précisions meilleures que 1mm/an. Lorsqu'on dispose de ces mesures, il reste encore à mener à bien leur analyse afin de bien comprendre la nature des déformations de l'écorce terrestre dévoilées sur un site géologiquement actif comme par exemple un glissement de terrain, une faille ou une zone tectonique, etc. Le but du présent travail est de représenter d'une façon aussi intuitive que possible ces déformations, mais aussi leur niveau de signification. Nous sommes partis de la représentation classique par des

tenseurs de déformations, et nous avons œuvré à la compléter afin de pallier ses défauts de lisibilité et ses difficultés d'interprétation. Il s'agit donc d'une nouvelle représentation cartographique des déformations et de leurs erreurs sur la même carte, de telle sorte que les destinataires des mesures puissent en tirer une interprétation optimale sans entraînement particulier. Les travaux ne sont pas encore achevés mais les premiers résultats sont présentés ici.

## Des mesures géodésiques au champ tensoriel de déformations

L'étude de détection de mouvements du sol utilise classiquement un réseau de points de surveillance, ces points font l'objet de mesures successives

avec les techniques géodésiques terrestres ou spatiales classiques (p. ex. GNSS, Laser, DORIS, VLBI). On peut également obtenir un champ de vecteurs de déplacement en utilisant la corrélation entre deux ortho images, ce qui donne directement un champ régulier de vecteurs sur toute la zone étudiée. Néanmoins la comparaison des résultats de mesures géodésiques entre deux époques fournit un champ irrégulier de vecteurs de déplacement, alors qu'il est préférable d'obtenir un champ régulier de déformations sur toute la zone, aussi indépendant que possible de la position des points mesurés. Nous procédons donc classiquement à une première interpolation pour avoir les valeurs des vecteurs de déplacement aux nœuds d'une grille régulière couvrant tout le domaine étudié.

Nous avons testé plusieurs interpolateurs (linéaire, bi-cubique, plus proche voisin et fonctions splines) sur un chantier fictif représentant la géométrie d'une faille, afin de trouver et valider l'interpolateur le plus approprié, les tests ont montré que les interpolateurs linéaires et bi-cubiques ne donnent pas des résultats très satisfaisants, comme le montre la Figure 1.

De son côté, l'interpolateur spline présente une nette divergence lorsqu'on s'intéresse à des zones éloignées du site de mesure (Figure 2), et enfin le plus proche voisin donne des résultats qui ne conviennent pas du tout à l'intérieur de la zone de mesures.

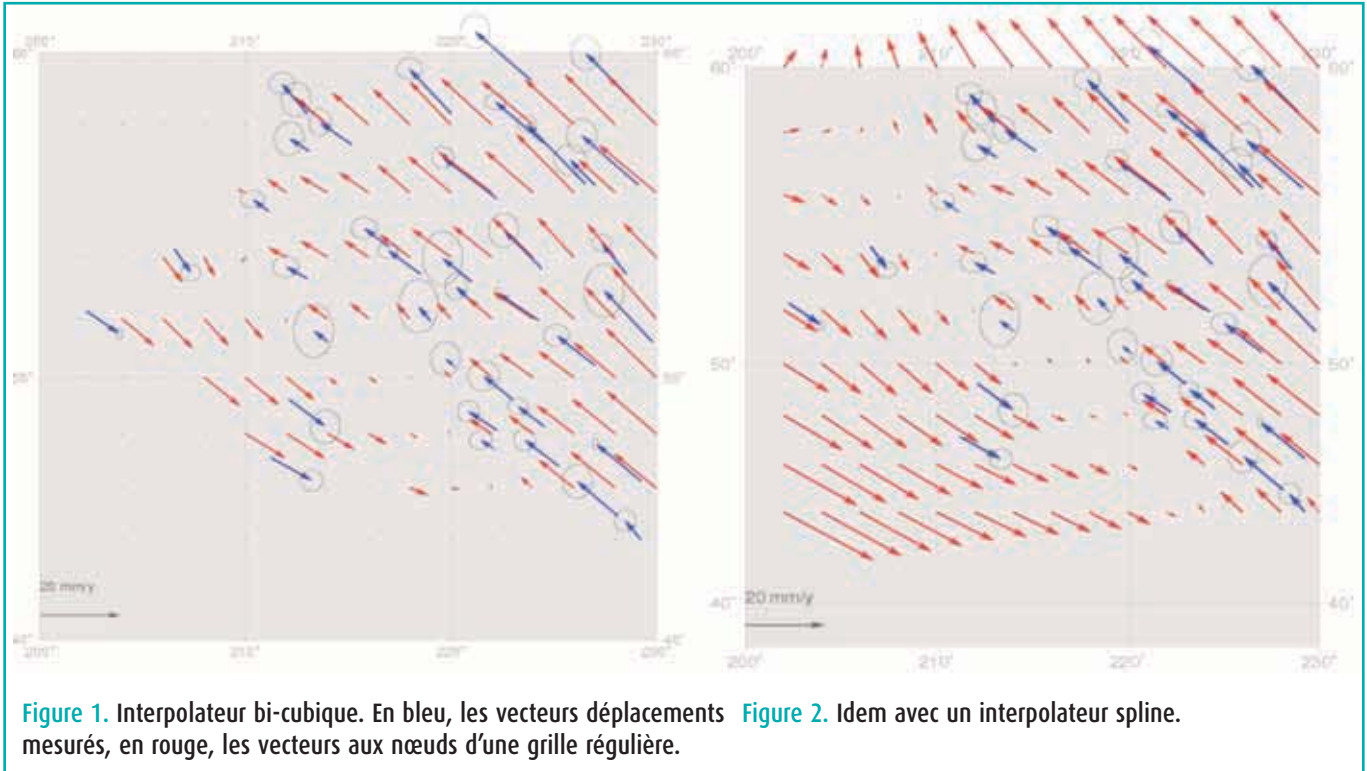


Figure 1. Interpolateur bi-cubique. En bleu, les vecteurs déplacements mesurés, en rouge, les vecteurs aux nœuds d'une grille régulière. Figure 2. Idem avec un interpolateur spline.

Notre choix alors consiste à combiner deux interpolateurs en prenant l'enveloppe convexe des points sur lesquels existent des données, à utiliser les splines pour interpoler dans cette enveloppe, et le plus proche voisin pour extrapoler en dehors du périmètre bordant les points de mesure (Figure 3).

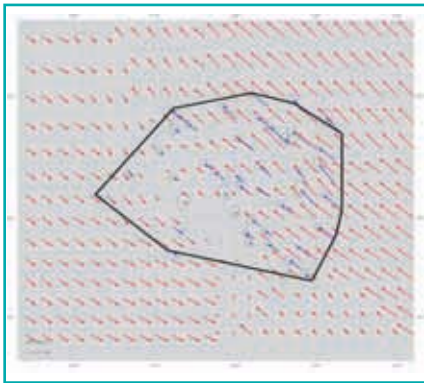


Figure 3. Interpolateur choisi : spline à l'intérieur du contour, plus proche voisin au-delà.

## Calcul et représentation classique de déformations

Il existe deux méthodes classiques pour représenter les déformations horizontales d'un réseau géodésique

(Brunner, 1979 ; Welsch, 1983 ; Franck, 1966 ; Prescott et al, 1979 ; P. Xu et E. Grafarend, 1995):

1. La première repose sur le calcul de vecteurs déplacement qui sont déduits à partir de coordonnées compensées d'un réseau de points communs à deux époques différentes, ces coordonnées étant exprimées dans un système de référence quelconque. Les erreurs de mesure sur le jeu de coordonnées sont représentées en se basant sur l'exploitation des ellipses d'erreurs. Cette méthode n'est pas intrinsèque car elle dépend d'un certain nombre de paramètres fixé a priori (système géodésique de référence), ce qui rend difficile l'interprétation de mouvements et de leurs erreurs (Kasser et Thom, 1995).
2. La seconde est basée sur le calcul des tenseurs de déformation, qui ont l'avantage d'être indépendants du système de référence choisi, ce qui permet de bien repérer les zones déformées. Rappelons que la déformation continue d'un matériau, à un niveau infinitésimal, transforme toujours un cercle en une ellipse. Le tenseur de déformation est souvent représenté par les axes principaux

de cette ellipse, et de manière graphique, une flèche vient indiquer si selon chaque axe il s'agit d'une compression ou d'un allongement. Néanmoins, il n'existe pas à ce jour de représentation réellement intuitive de ces tenseurs dont la lecture exige un réel entraînement. Et nous n'avons pas trouvé dans la documentation de représentation satisfaisante de leurs erreurs et de leur niveau de signification.

## Méthode adoptée

Nous avons travaillé au moyen de cette deuxième technique des tenseurs de déformation, et sur les diverses façons de représenter simultanément les éléments utiles des tenseurs, ainsi que leur niveau de signification, en adoptant une approche de cartographe.

On dispose à ce stade d'une grille régulière de vecteurs vitesse entre deux époques. On détermine le tenseur de déformation dans chaque carré de la grille (numéroté  $c = 1, 2, \dots, n$ , où  $n$  représente le nombre total de mailles dans la grille), on calcule les variations relatives pour les six longueurs (quatre côtés et les deux



diagonales) de chaque carré élémentaire, puis on forme l'équation :

$$\Delta d_{ck} = d^1_{ck} - d^2_{ck} \quad (k = 1, 2, \dots, 6, \text{ et } c = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

où k correspond à l'une des longueurs dans le carré élémentaire, et les exposants 1 et 2 aux deux époques de mesure.

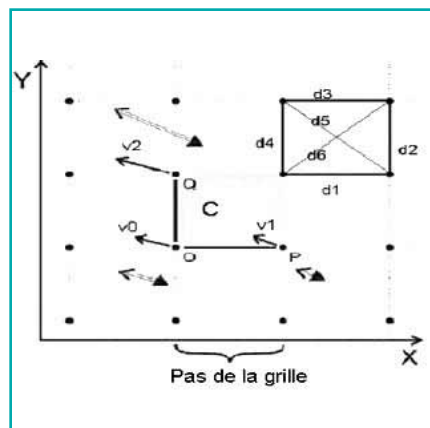


Figure 4. Illustration du calcul de tenseurs de déformation sur une maille c de la grille.

Le calcul des composantes du tenseur est effectué ainsi : pour des déformations infinitésimales, la variation relative de chaque côté  $d_{ck}$  s'écrit (Pagarete et al, 1990, Kasser et Thom, 1995 ; Welsch, 1983) :

$$U_{ck} = \frac{\Delta d_{ck}}{d_{ck}} = \epsilon_{c_{xx}} \sin^2 G_{ck} + 2 \epsilon_{c_{xy}} \sin G_{ck} \cos G_{ck} + \epsilon_{c_{yy}} \cos^2 G_{ck} \quad (2)$$

où  $\epsilon_{c_{xx}}$ ,  $\epsilon_{c_{yy}}$  sont les composantes de tenseur de déformation suivant les axes x et y,  $\epsilon_{c_{xy}}$  la composante cisailante, et  $G_{ck}$ ,  $d_{ck}$ ,  $\Delta d_{ck}$  respectivement le gisement, la longueur et la variation de longueur du côté k, dans la maille c. La détermination de ces trois inconnues  $\epsilon_{c_{xx}}$ ,  $\epsilon_{c_{xy}}$ ,  $\epsilon_{c_{yy}}$  nécessite au moins trois équations, mais nous en avons six (une équation pour chaque côté + les deux diagonales). Le nombre d'équations étant plus grand que le nombre d'inconnues, nous pratiquons une résolution par moindres carrés. D'une manière générale on construit les équations matricielles :

$$H(6,3) \cdot \epsilon(3,1) = u(6,1) \quad (3)$$

où H est la matrice des coefficients suivant l'équation (2),  $\epsilon$  est le vecteur des composantes ( $\epsilon_{c_{xx}}$ ,  $\epsilon_{c_{xy}}$ ,  $\epsilon_{c_{yy}}$ ), et u le vecteur des six élongations des côtés de la maille.

La représentation de la déformation nécessite le calcul des composantes principales de chaque tenseur :

1. la composante normale (compression, dilatation) ;
2. la composante cisailante ;
3. l'orientation d'une des composantes principales (normale ou cisailante) qui sont à 45° l'une de l'autre.

A l'issue de ce calcul par moindres carrés, on obtient les valeurs numériques de  $\epsilon_{c_{xx}}$ ,  $\epsilon_{c_{xy}}$ ,  $\epsilon_{c_{yy}}$ , donc on a, dans chaque carré élémentaire de la grille, une matrice  $\begin{pmatrix} \epsilon_{c_{xx}} & \epsilon_{c_{xy}} \\ \epsilon_{c_{yx}} & \epsilon_{c_{yy}} \end{pmatrix}$

dont les valeurs sont connues, pour obtenir les deux composantes principales du tenseur (maximale  $e_1$  et minimale  $e_2$ ). Dans chaque maille on calcule les valeurs propres et les vecteurs propres de chaque matrice, les valeurs propres de matrice correspondent aux  $e_1$  et  $e_2$  tandis que les vecteurs propres donnent l'orientation des composantes normales de tenseur (deux directions perpendiculaires).

Illustrons ce qui a précédé avec un exemple sur la faille coulissante dextre bien connue de San Andreas, en Californie.

Nous disposons sur ce site d'un jeu de vecteurs vitesses observés sur la région

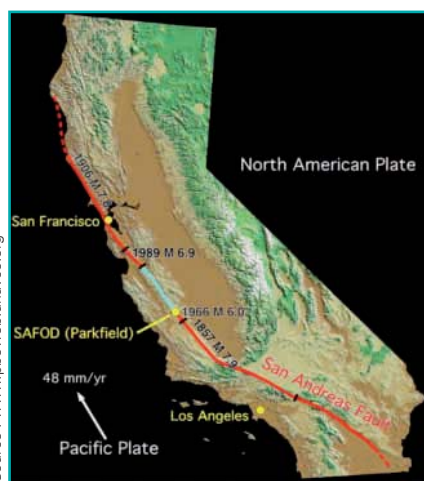


Figure 5. Le positionnement géographique de la faille de San Andreas

comprise entre 32°N à 46°N en latitude et 122°W à 111°W en longitude (www.pbweb.unavco.org). Ceux-ci ont été mesurés à diverses époques entre 2004 et 2007, puis ramenés à une époque de référence unique. Nous interpolons sur une grille régulière de pas de 0.5° (en longitude et en latitude).

Un calcul du tenseur de déformation a alors été effectué dans chaque maille en suivant la méthode présentée ci-dessus. A la fin de cette opération nous obtenons donc les composantes du tenseur de déformation dans toutes les mailles.

Les vecteurs observés ainsi que la grille interpolée de champ de vitesse sont illustrés ci-dessous Figure 6, alors que la Figure 7 montre la représentation classique de tenseurs de déformation obtenus.

La représentation classique des tenseurs de déformation, sans l'emploi d'un maillage régulier, présente quelques inconvénients (A. Merbah et al, 2005) :

1. la représentation graphique des axes des tenseurs de déformation est d'une lecture et d'une interprétation peu pratiques, nécessitant un certain entraînement.
2. la représentation tensorielle n'est pas complètement intrinsèque puisqu'elle dépend de la configuration du réseau (choix des triangles élémentaires joignant les points de mesure), aussi longtemps qu'on ne travaille pas dans un réseau maillé régulièrement.
3. la représentation graphique des axes des tenseurs présente une singularité au voisinage d'une déformation isotrope (il s'agit des axes d'une ellipse lorsque celle-ci devient un cercle).

C'est dans ce thème que notre travail s'inscrit. Il consiste donc à :

1. chercher une meilleure représentation graphique des tenseurs de déformation en utilisant largement les couleurs.
2. représenter les tenseurs avec leur degré de signification d'une façon intuitive (car l'utilisateur n'a pas vocation à être spécialiste en analyse de variance).



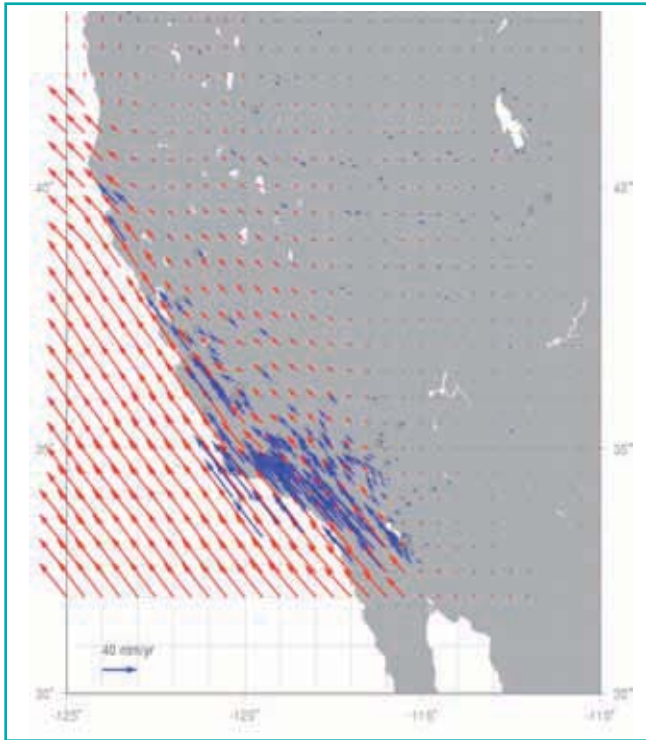


Figure 6. Les vecteurs observés en bleu, vecteurs interpolés aux nœuds d'un maillage régulier en rouge.

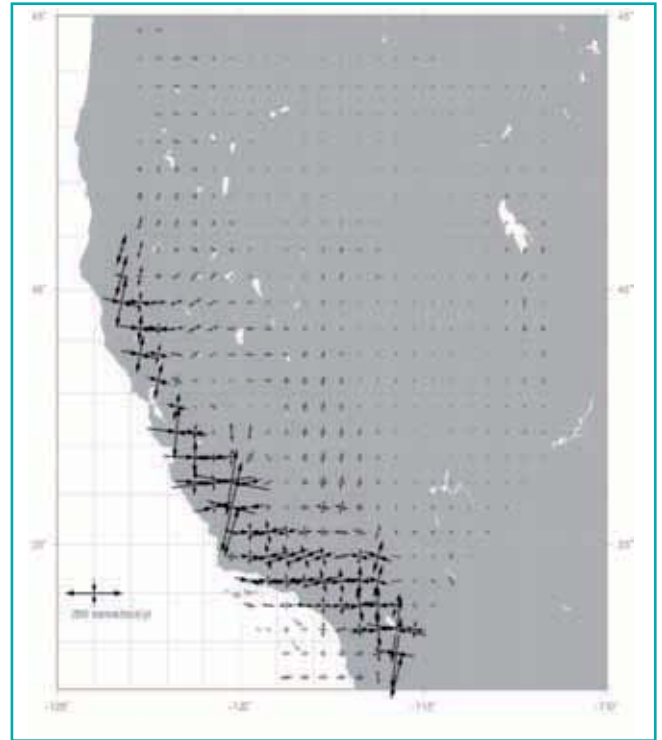


Figure 7. La représentation classique en tenseurs de déformation, mais avec un choix de maillage régulier.

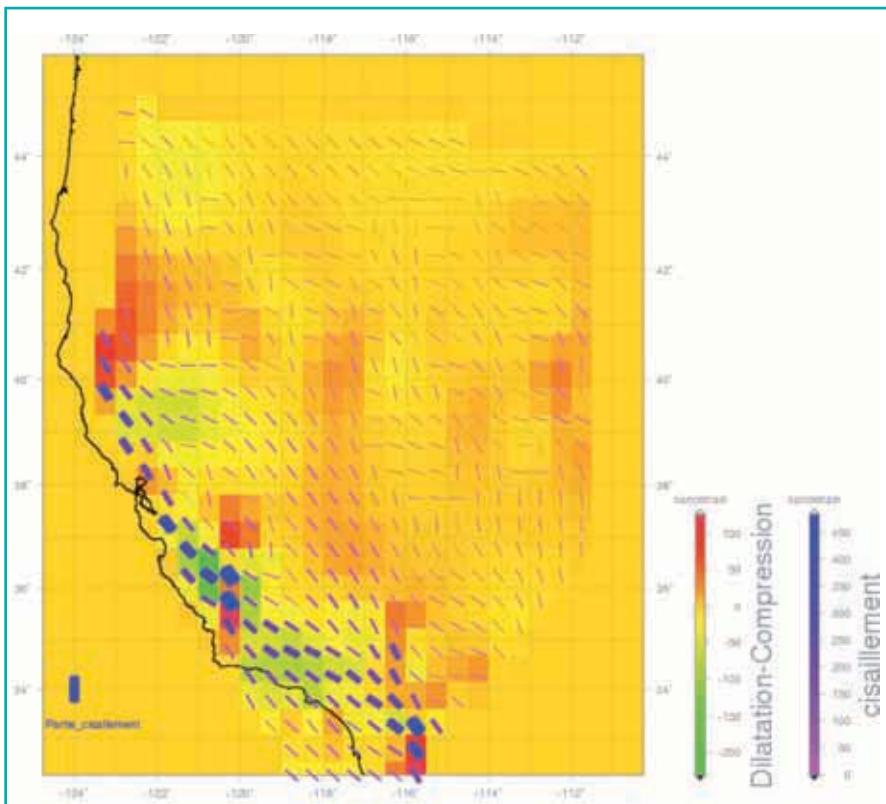


Figure 8. Un test de représentation de tenseurs de déformation de la faille de San Andreas. Du vert au rouge, la partie isotrope de la déformation, le jaune-orangé correspondant à une valeur nulle. Dans les segments, du bleu au magenta (et avec l'épaisseur du segment également), l'intensité du cisaillement, l'orientation du cisaillement maximal (à 45° des axes de l'ellipse de déformation) est donnée de façon graphique.

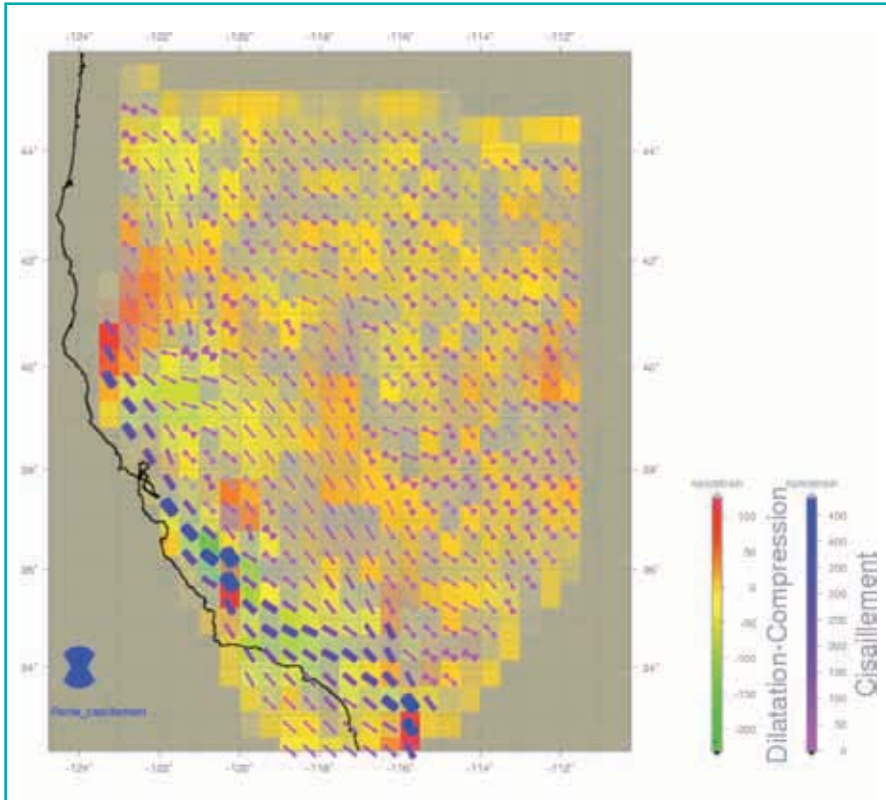
Pour tout cela, il nous faut trouver une méthode cartographique optimale pour faire passer un maximum d'informations lisibles sur une même carte. Nous allons donc représenter les déformations sous forme de thématiques colorées, et les combiner pour en permettre une lecture aisée.

Notre choix a été de prendre :

- une échelle de couleur pour représenter la composante normale de tenseurs de déformation en saturation maximum ;
- un segment de longueur fixe, de largeur, couleur et d'azimut variables pour représenter la composante cisailante, sa valeur et son orientation.

Le premier test de représentation de tenseurs de déformation (sur la faille de San Andreas) est illustré ci-contre (Figure 8) sans la représentation des erreurs de mesure.

Il répond bien à la recherche d'un affichage qui soit facile à expliquer et donc bien plus intuitif à prendre en main pour un néophyte en matière de mécanique des milieux continus.



**Figure 9.** Test de la représentation simultanée de tenseurs de déformation avec leur degré de signification sur la faille de San Andreas, l'erreur sur la partie isotrope de déformation est représentée par la saturation de couleur employée : couleur moins saturée, donc se rapprochant du gris = valeur moins significative (le gris est atteint lorsque l'erreur est plus importante que la déformation). L'erreur sur la partie cisailante de déformation est représentée également par la saturation de couleur dans l'éventail défini à la figure 10 (ici encore, couleur moins saturée = valeur moins significative), une teinte grise signifie que dans cette zone les tenseurs ne sont pas du tout significatifs.



**Figure 10.** Illustration du nouveau symbole cartographique que nous avons utilisé pour la représentation de composante de cisaillement de tenseurs de déformation, avec ce symbole de longueur fixe on représente l'intensité du cisaillement par la largeur du symbole, ainsi qu'avec une couleur de saturation maximum. L'erreur sur la valeur du cisaillement est représentée de manière inversement proportionnelle à la saturation de couleur employée, et l'erreur sur l'orientation de ce cisaillement maximum par l'angle de l'éventail.

## L'analyse des erreurs et leur représentation visuelle

L'analyse des erreurs et du niveau de signification des résultats repose sur deux aspects très différents :

1. L'impact de la précision des données utilisées pour le calcul, aspect strictement lié aux précisions des mesures ;
2. Le fait que la maille où on calcule chaque tenseur est plus ou moins contrainte selon sa position par rapport aux points de mesure, aspect strictement lié à la géométrie du réseau.

Le premier aspect (analyse d'erreur) est traité en utilisant une méthode de Monte Carlo. Celle-ci est basée sur la simulation d'un grand nombre de mesures. On dispose d'un champ de vitesse avec les matrices de variance

covariance, pouvant être représentées par des ellipses d'erreur aux extrémités de chaque vecteur vitesse. On effectue un tirage aléatoire de vecteurs vitesse pour chaque point de mesure en utilisant leurs variances, et on calcule les tenseurs qui en découlent, on renouvelle l'opération par exemple 1000 fois, et donc à l'issue de cette opération on aura 1000 tenseurs différents dans une maille donnée. C'est avec ces 1000 tenseurs qu'on va recalculer les barres d'erreurs sur les deux composantes de tenseurs (normale et cisaillement) ainsi que l'erreur sur leur orientation. On compare la valeur du paramètre à représenter (déformation isotrope dans l'ensemble du carré représentant la maille, et cisaillement sous forme d'un symbole au centre de chaque carré) à l'amplitude de sa variation lors de ces tirages successifs. Le principe retenu est que moins la valeur est significative, moins la couleur est saturée et donc plus on se rapproche d'une teinte grise.

Nous avons utilisé un symbole spécifique pour représenter la partie cisailante des tenseurs de déformation et son niveau de signification, il est explicité dans la Figure 10.

La représentation des niveaux de signification à l'issue de ce calcul par la méthode Monte Carlo est présentée sur le site test de la faille de San-Andreas (Figure 9) et, partant, l'erreur sur la composante isotrope est représentée par la saturation de la couleur employée dans chaque maille de la grille, et celle sur la partie cisaillement, par la saturation de couleur employée dans chaque éventail. Enfin l'erreur sur l'orientation de la direction de cisaillement maximal est représentée par l'ouverture de l'angle de l'éventail. Ainsi, plus la teinte est vive, plus le résultat est significatif, plus elle se rapproche du gris, moins elle l'est, ce qui correspond bien à notre recherche d'un thème cartographique intuitif.

Le second volet de l'analyse d'erreur correspond à la contrainte réellement apportée par les mesures du réseau pour le calcul de chaque tenseur. La question posée est la suivante : dans une maille donnée, quel est le niveau



de contrainte apportée par des mesures, supposées parfaites, effectuées sur les points choisis pour y effectuer les mesures de déformation. Intuitivement, on comprend bien que lorsqu'on est proche d'une zone où la densité de points est élevée, cette contrainte est élevée, alors que lorsqu'on va s'éloigner des points, elle va devenir de plus en plus faible. Pour ce faire, on procède à un autre type de raisonnement.

En chaque point faisant l'objet de mesures, un par un, on crée artificiellement un vecteur déplacement fictif d'une longueur unité (unité arbitraire, sans importance) dans la direction du Nord, puis dans trois autres directions tournant successivement de 45° avec la précédente, tous les autres vecteurs aux autres points de mesure étant maintenus à une valeur nulle. Ce choix de directions explore donc approximativement toutes les directions du plan. On évalue l'influence de ces vecteurs fictifs successifs dans chacune des mailles en sommant à chaque fois les carrés des variations relatives des six segments que l'on peut construire dans chaque maille. Ainsi, dans une maille où ce total est élevé, cela signifie que des mesures apportent des contraintes élevées, et inversement. On peut donc sur cette base calculer un paramètre qui modélise la contrainte apportée par les mesures réelles sur chaque maille. Cette partie de l'étude est en cours, il va s'agir en effet de combiner ce paramètre avec le précédent (issu de l'analyse d'erreurs liées aux mesures elles-mêmes), et différentes possibilités devront être essayées et validées auprès d'utilisateurs.

## Conclusion

L'outil présenté ici, qui est encore au stade du développement, est destiné à faire le lien entre l'expertise des géodésiens et celle des géologues et géophysiciens afin de leur permettre de s'approprier la totalité des données disponibles dans des chantiers de mesures de déformations, tant mesures que résultats de l'analyse d'erreurs, sans en omettre aucune ni

en ajouter artificiellement. Ceci devrait faciliter beaucoup l'interprétation de ces phénomènes et une prise en compte pleinement réaliste des erreurs sur les résultats. Les représentations adoptées ne doivent exiger qu'un minimum d'apprentissage de la part des lecteurs et donc être très intuitives. Les premières étapes de ce travail vont dans ce sens, mais elles doivent désormais faire l'objet d'études complémentaires en analysant les comportements des usagers de ces mesures de déformations, afin d'optimiser les différents paramètres de la représentation et d'en tirer la meilleure facilité de lecture possible.

Cet outil pourra s'intégrer à GMT (Generic Mapping Tools), logiciel libre de représentation graphique des données géographiques (Paul Wessel et Walter H. F. Smith, Hawaii université). Les illustrations ont été obtenues en utilisant ce logiciel. ●

## Contact

**Leila EISSA, Michel KASSER**

Ecole Nationale des Sciences  
Géographiques, Institut Géographique  
National  
leila.eissa@ensg.eu

## Références

- Chung-Pai Chang, Tsui-Yu Chang, Jaques Angelier, Honn Kao, Jian-cheng Lee, Shui-Beih Yu** - *Strain and stress field in Taiwan oblique convergent system : constraints from GPS observation and tectonic data*. Earth and planetary Science Letters 214 (2003) 115-127.
- J. Denègre** - *Sémiologie et conception cartographique*, Lavoisier, 2005.
- H.-G. Kahle, M. Cocard, Y. Peter, A. Geiger, R. Reilinger, A. Baraka and G. Veis** - *GPS-derived strain rate field within the boundary zones of the Eurasian, African and Arabian plates*, J. Geophys. Res. 105B10, 23353-23370, 2000.
- M. Kasser, C. Thom (1995)** - *Deformation analysis within a geodetic network by use of regularly spaced deformation tensors*.

**A. Merbah, B. Gourine, S. Kahlouche, M. Meghraoui, B. Ghezali and M.J. Sevilla (2005)**. *Evaluation et interprétation des déformations horizontales et de leurs erreurs sur un réseau de surveillance sismique*. From Pharaohs to Geoinformatics, FIG Working Week 2005 and GSDI- Cairo, Egypt April 16-21, 2005.

**C. Million (1993)** - *Les bases du calcul du tenseur de déformation et du tenseur d'indécision*, Revue Géotop de l'ESGT N°128-Mars 1993.

**J.-M. Nocquet** - *Mesure de la déformation crustale en Europe occidentale par géodésie spatiale*, thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 2002.

**J. Pagarete, M. Kasser et J.-C. Ruegg**, *Évaluation et représentation des erreurs sur les déformations d'un réseau géodésique : utilisation de la méthode de Monte Carlo*. Bull. Géod. 64 (1990) pp. 63-72.

**P. Xu et E. Grafarend (1995)** - *A multi-objective second-order optimal design for deforming networks*. Geophys. J. Int. (1995) 120, pp. 577-589.

## ABSTRACT

**Key-words:** strain tensor, Mapping, Monte Carlo, geophysical interpretation

*The deformations studies are classical topics, they are very important for geophysical applications of geodetic measurements. The evaluation of crustal motions is derived from the computation of horizontal displacements of geodetic points; it is often based on strain tensor inside each elementary figure of the network. This article presents the determination and the simultaneous representation of the deformations and their related errors through a new mapping method of the strain tensors; a Monte Carlo method is employed to compute the significance level of the resulting tensors. Such representation is proposed so as to overcome the drawbacks of the classical tensor representation; it will help to get a better geophysical interpretation of the phenomena observed.*